Μάθημα 15ο 26/04/18

Σύμμορφες Απεικονίσεις

Καμπύλες στο $\mathbb{C}$. βλ. καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$

Ορισμός

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται (παραμετρική) καμπύλη στο $\mathbb{C}$ και η εικόνα της $C = \gamma(I) \subset \mathbb{C}$ καμπύλη στο $\mathbb{C}$

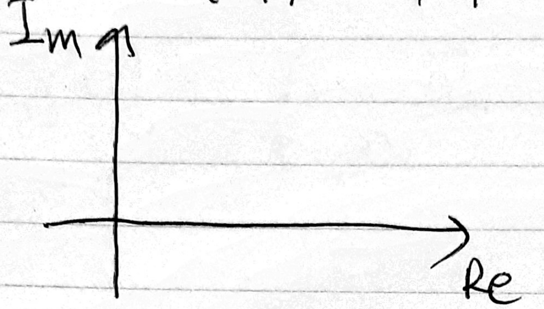
Μια συνάρτηση $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται συνεχής

$\forall t_0 \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in I, |t - t_0| < \delta$:

$$|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$$

Π.χ. $\gamma(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$

ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα a, b.

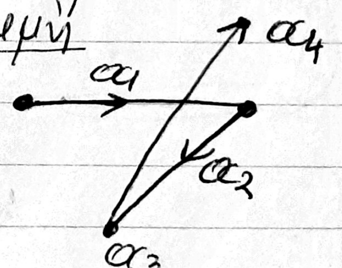


Π.χ. $\gamma(t) = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$

κύκλος ακτίνας $r>0$ κέντρου 0.

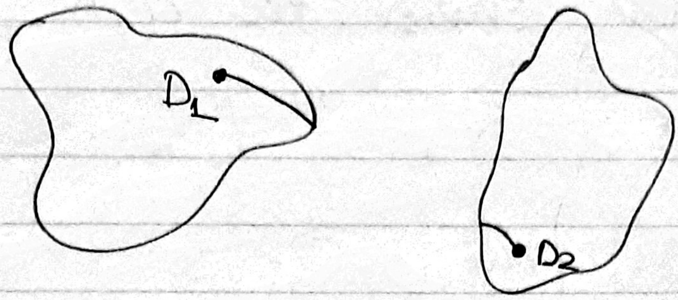
Ορισμός

i) Η καμπύλη που σχηματίζεται αν ενώσουμε $n+1$ διαφορετικά σημεία του $\mathbb{C}$ με ευθύγραμμα τμήματα λέγεται πολυγωνική γραμμή.

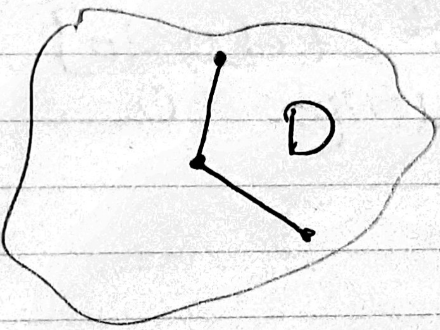


ii) Ένα ανοικτό $D \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται συνεκτικό ή τόπος ή χωρίο, αν για κάθε δύο σημεία του D υπάρχει πολυγωνική γραμμή μέσα στο D που τα ενώνει

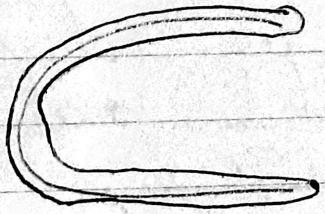
$D = D_1 \cup D_2$



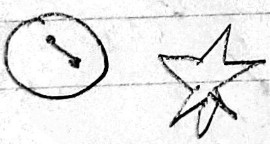
<u>όχι συνεκτικό.</u>



<u>συνεκτικό</u>



<u>συνεκτικό</u>



κυρτά και αστερόμορφα είναι συνεκτικά

Ορισμός Η $\gamma: I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται διαφορίσιμη στο $t \in I$ αν υπάρχει η παράγωγος

$$\underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{C}} := \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \underbrace{(\mathrm{Re}\,\gamma)'(t)}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{(\mathrm{Im}\,\gamma)'(t)}_{\in \mathbb{R}} =$$

$$= \mathrm{Re}\,\gamma'(t) + i\,\mathrm{Im}\,\gamma'(t)$$

η οποία αντιστοιχεί στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^2$ της $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \underbrace{\gamma(t)}_{\substack{:= \\ \text{αντ} \\ \text{στοιχία}}} \in \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\gamma(t) \\ \mathrm{Im}\,\gamma(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x + iy \underset{\substack{\text{αντ} \\ \text{στοιχ.}}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Η $\gamma: I \to \mathbb{C}$ $\boxed{C^1 \text{ καμπύλη}}$ $\boxed{\text{ή ανεχώς διαφορίσιμη}}$ καμπύλη (συμβ: $\gamma \in C^1(I)$) αν:

$$\mathrm{Re}\,\gamma,\ \mathrm{Im}\,\gamma : I \to \mathbb{R} \text{ είναι } C^1$$

Η $\gamma: I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται κανονική αν είναι C^1-καμπύλη και $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

Επίσης ισχύει η άλγεβρα των ορίων

$$(\gamma_1+\gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t)$$

$$(\gamma_1\gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)$$

$$\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)'(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\gamma_2'(t)}{(\gamma_2(t))^2} \quad \text{για } \gamma_2(t) \neq 0$$

Ισχύει και ο <u>ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ</u>

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό,
μιγαδικά διαφορίσιμο στο $\gamma(t) \in D$
όπου $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{C}$ διαφορίσιμη στο $t \in I$.

$$\boxed{(f\circ\gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)}$$

<u>Απόδ.</u>

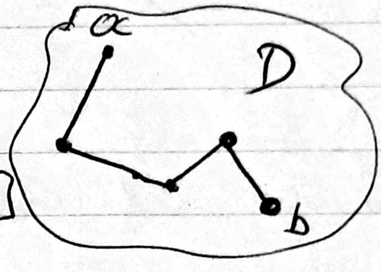
<u>Άσκηση</u> (ή από την αρχή, ή χρησιμοποιώντας το ανάλογο θεώρημα στον ΑΠ II)

Πρόταση: Αν $D \subset \mathbb{C}$ τόπος (δηλ. ανοιχτό και συνεκτικό) και $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f' \equiv 0$

$\Longrightarrow$ f είναι σταθερή συνάρτηση

Απόδ.

Έστω δύο σημεία $\alpha, b \in D$, $\alpha \neq b$, που συνδέονται με την πολυγ. γραμμή, $\gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$ που βρίσκεται ολοκλ. μέσα στο D.



με $\gamma_k(t) = \alpha_{k-1} + t(\alpha_k - \alpha_{k-1})$, $t \in [0,1]$

με $\alpha_0 := \alpha$, $\alpha_n := b$, $k = 1, \ldots, n$

Από την ολομορφία της f και $f' \equiv 0$ έχουμε:

$$(f \circ \gamma_k)'(t) = \underbrace{f'(\gamma_k(t))}_{=0} \gamma_k'(t) = 0$$

$\forall\ t \in [0,1]$
$\forall\ k = 1, \ldots, n$

$$\Longrightarrow \operatorname{Re}(f \circ \gamma_k)'(t) = 0 \ \wedge\ \operatorname{Im}(f \circ \gamma_k)'(t) = 0$$

$$\overset{\text{ΘΘΑΛ}}{\Longrightarrow} \operatorname{Re}(f \circ \gamma_k)(1) - \operatorname{Re}(f \circ \gamma_k)(0) = \underbrace{\int_0^1 \underbrace{\big(\operatorname{Re}(f \circ \gamma_k)\big)'(t)}_{=0}\, dt}_{=0}$$

$$\operatorname{Im}(\ldots) - \operatorname{Im}(\ldots) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(f\circ\gamma_k)(1)}_{=f(\alpha_k)} - \underbrace{(f\circ\gamma_k)(0)}_{=f(\alpha_{k-1})} = 0 \quad \forall\, k=1,..,n$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ \alpha_n}}{f(b)} - \underset{\substack{\parallel \\ \alpha_0}}{f(a)} = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) - f(\alpha_{k-1}) = 0$$

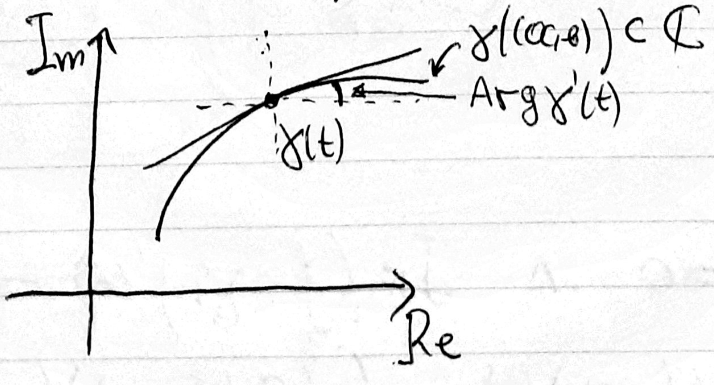
Δηλ $\forall\, a,b\in D$: $f(a)=f(b) \Rightarrow f(b)=f(a)\ \forall\, b\in D$

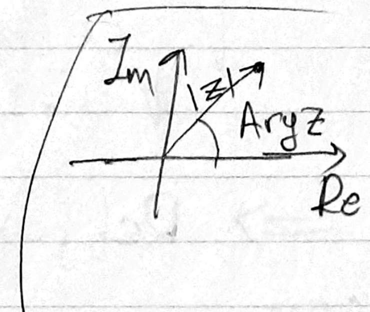
$\Rightarrow$ f σταθερή και a σταθερό.

$\rightarrow$ Έστω $\gamma:(\alpha,\beta)\longrightarrow \mathbb{C}$ κανονική και $t\in(\alpha,\beta)$

$\Rightarrow \gamma'(t) = |\gamma'(t)|\, e^{i\,Arg\,\gamma'(t)}$ (1), $\gamma'(t)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

όπου $Arg\,\gamma'(t)$ είναι η κυρτή προσανατολισμένη γωνία από τον άξονα των πραγματικών μέχρι το διάνυσμα $\gamma'(t)\in\mathbb{R}^2$



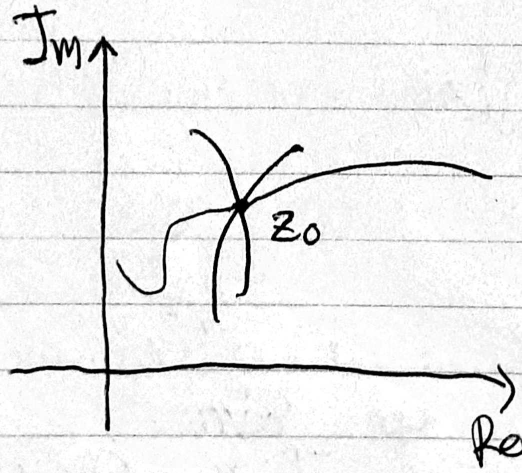


Από την (1) προκύπτει:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{|\gamma(t+h)-\gamma(t)|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}}{\left|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right|} =$$

$$= \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = e^{i\operatorname{Arg}\gamma'(t)} \quad (2)$$

Έστω τώρα $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ μιγαδικά διαφορίσιμη στο $z_0 \in D$ με $\boxed{f'(z_0) \neq 0}$ και $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow D$, $\varepsilon > 0$ <u>κανονική</u> με $\gamma(0) = z_0$



Τότε $(f\circ\gamma)'(0) = \underbrace{f'(\underbrace{\gamma(0)}_{=z_0})}_{\neq 0}\underbrace{\gamma'(0)}_{\neq 0} \neq 0$

$$\Longrightarrow (f\circ\gamma)'(0) = |(f\circ\gamma)'(0)|\, e^{i\operatorname{Arg}\overbrace{(f\circ g)'(0)}^{}}$$

$$\underbrace{}_{=f'(z_0)\gamma'(0)}$$

όπου (3) $\boxed{\arg(f\circ\gamma)'(0) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(0)} = \operatorname{Arg} f'(z_0) +$

$+\operatorname{Arg}\gamma'(0)$

Ο (3) σημαίνει ότι στο z_0 η f στρέφει τις καμπύλες που διέρχονται από το z_0 <u>κατά τη σταθερή</u> (ως προς τις καμπύλες) <u>κυρτή προσανατολισμένη</u> <u>γωνία</u> $\operatorname{Arg} f'(z_0)$

Από το (3) προκύπτει:

$$e^{i\operatorname{Arg}(f\circ\gamma)'(0)} = e^{i\arg(f\circ\gamma)'(0)} \underset{(3)}{=} e^{i\arg f'(z_0)}\, e^{i\arg\gamma'(0)} =$$

$$= e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}\, e^{i\operatorname{Arg}\gamma'(0)}$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)}{|\quad '' \quad|}}{\dfrac{\gamma(h)-\gamma(0)}{|\quad '' \quad|}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{(f\circ\gamma)'(0)}{|(f\circ\gamma)'(0)|}}{\dfrac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|}}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}\, e^{i\operatorname{Arg}\gamma'(0)}}{e^{i\operatorname{Arg}\gamma'(0)}} = e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}$$

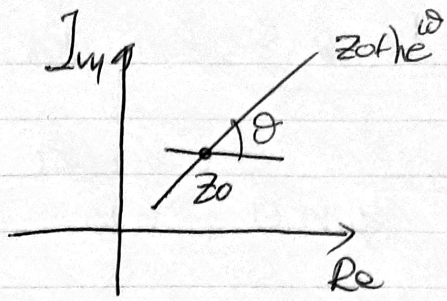
<u>δηλ</u> το όριο αυτό υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη γ. Τότε λέμε

<u>(ορισμός)</u> <u>στο z_0 η f διατηρεί τις γωνίες.</u>

Ειδικότερα για τις καμπύλες

$\gamma(h) = z_0 + he^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}$

το όριο γίνεται :



$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)}{|(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)|}}{\dfrac{\gamma(h)-\gamma(0)}{|\gamma(h)-\gamma(0)|}} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)}{|f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)|}}{\dfrac{z_0+he^{i\theta}-z_0}{|z_0+he^{i\theta}-z_0|}} = \lim_{h\to 0^+} e^{-i\theta}\frac{f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)}{|f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)|}$$

$= e^{-i\theta}e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}$, δηλ <u>το όριο $\exists$ και είναι ανεξάρτητο από το θ</u>

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο (βλ. αύριο) και άρα:

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, είναι <u>μιγαδικά διαφορ.</u> στο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$ <u>αν-ν</u> είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο z_0 και το όριο

$$\forall \theta \quad \lim_{h\to 0^+} e^{-i\theta}\frac{f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)}{|f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)|}$$ με μη-μηδενική παράγωγο

$\exists \ \forall \ \theta \in \mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από το θ.

<u>δηλ.</u> ισοδύναμα αν η f διατηρεί τις γωνίες στο z_0

<u>Ορισμός</u>

Μια $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ ανοικτό $\subset \mathbb{C}$ ολόμορφες με $f'(z) \neq 0 \ \forall \ z \in D$ λέγεται <u>σύμμορφη</u>.